Matteo Ruggiero. email ruggiero@math.univ-paris-diderot.fr
Page Web: http://www.imj-prg.fr/~matteo.ruggiero/
(Onglet Enseignement), + Didel

Cours/TD Du 15/09 au 12/12

Pause d'automne du 27/10 au 31/10

Évaluation:

- Devoir ~~Sur Table~~ Surveillé (1h) ~ 06-10/10 (DS1)
- Partiel (2-3h) ~ 08/11 (P)
- Devoir Surveillé (1h) ~ 24-28/11 (DS2)
- Examen (3h) Décembre ou Janvier (E)
- Rattrapage (3h), Juin (R).

Note finale du cours:

$$N = \frac{E + CC}{2} \qquad CC = \frac{2P + DS1 + DS2}{4} + B \qquad (B \text{ bonus}, \leq 1)$$

En cas de rattrapage, $N = R$.

- On commence à l'heure, ~20 minutes pour rentrer si on retard.
- Surtout, pas de bruit quand on rentre et pendant les cours
- En cas d'absence aux épreuves, un justificatif ou c'est 0.
- Aux épreuves, rien que des stylos (sauf devoir surveillé, du papier aussi) donc pas de calculettes, des portables, peine annullation et 0 (au pire) même pas de trousses.

Ne pas déranger vos collègues en parlant entre vous. Je peux comprendre des commentaires sur le cours, mais si vous avez des questions, vous êtes invités à m'en poser pendant ou à la fin du cours.

Programme

1) Nombres Complexes
2) Ensembles et Applications.
3) Algèbre linéaire
4) Propriétés des réels
5) Analyse (limites, continuité et dérivées)

Livres (Poly à la fin du cours)

- Steward : Analyse, concepts et contextes, Volume 1 : fonctions d'une variable.
- Liret, Martinais : Algèbre 1re année. Cours et exercices avec solutions.
- " " : Analyse " " " " " " .

NOMBRES COMPLEXES

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels.

$p(x) = \underset{\neq 0}{a}x + b$ polynôme de degré 1 admet toujours une solution.

$p(x) = ax^2 + bx + c$ admet $\begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$ solutions $\Leftrightarrow$ $\underset{\text{discriminant}}{\Delta = b^2 - ac}$ est $\begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$

On voudrait trouver une famille de nombres telle que tout polynôme admet des solutions. Par exemple : $x^2 + 1 = 0$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc $\nexists x \in \mathbb{R}$ tq $x^2 + 1 = 0$

On note par i un nombre "imaginaire" tq $i^2 = -1$.

$\boxed{\text{Déf}}$ Un nombre complexe s'écrit de façon unique (dite cartésienne) comme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$x = \mathrm{Re}\, z$ est dite partie réelle de z

$y = \mathrm{Im}\, z$ est dite partie imaginaire de z.

i est dit unité imaginaire.

z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z = 0$.

Si $\mathrm{Re}\, z = 0$ ($z = iy$ $y \in \mathbb{R}$), on dit que z est imaginaire pur (on note l'ensemble par $i\mathbb{R}$).

Somme et Produit

Soient $z = x+iy$ et $w = u+iv$ deux nombres complexes.

On définit :

$$z + w = (x+iy) + (u+iv) := (x+u) + i(y+v).$$

$$z \cdot w = (x+iy)(u+iv) := (xu - \underbrace{yv}_{(i^2 yv)}) + i(xv+yu)$$

- 0 est l'élément neutre de la somme $(z+0 = 0+z = z)$
- 1 est l'élément neutre du produit $(z \cdot 1 = 1 \cdot z = z)$

Inverse de la somme (symétrique) : $-z = -x - iy$ $\quad (z - z = 0)$

Inverse du produit $z = x+iy \neq 0 \Rightarrow \exists w = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ tq $zw = wz = 1$.

$$(x+iy) \cdot \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - i^2 y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda z = \lambda x + i\lambda y$.

Conjugué et module.

Déf : Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe.

Le conjugué de z est $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$

Le module de z est $|z| := \sqrt{x^2+y^2} \in [0; +\infty[$.

Propriétés :

- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $\quad (z\bar{z} = |z|^2)$.
- $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $\quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$\Rightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, $\quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$, $\quad z = |z| \Leftrightarrow z \in [0, +\infty[$

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\quad \bar{\bar{z}} = z$ (la conjugaison est "involutive")
- $|zw| = |z||w|$, $\quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$ $\quad \lambda \in [0, \infty[$, $|\lambda| = \lambda$.
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, Égalité $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$, Égalité $\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Prop (Inégalité triangulaire) $\forall z, w \in \mathbb{C}$, on a [redacted]

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Preuve :

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + \underbrace{w\bar{z}}_{\overline{z\bar{w}}} + z\bar{w} + w\bar{w} = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

Mais $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z||\bar{w}| = |z||w|$, donc.

$$|z+w|^2 = |z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2.$$

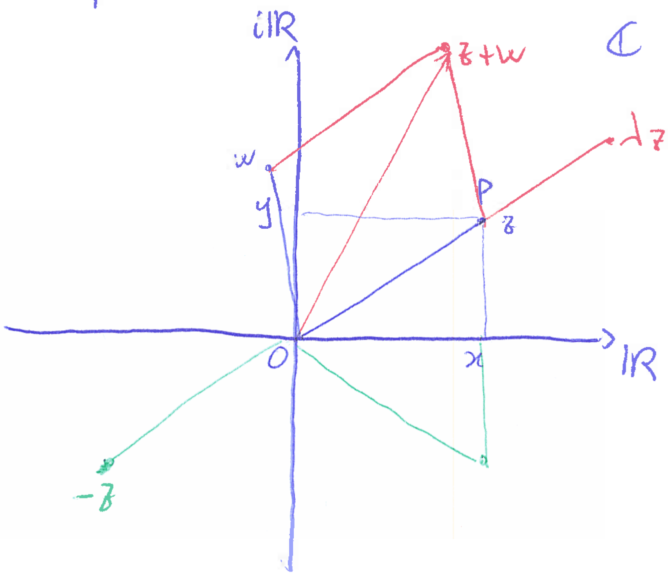
Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on obtient $|z+w| \leq |z| + |w|$.

$\square$

Représentation Géométrique d'un nombre complexe

Considérons le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ (rapporté à un repère orthonormal donné)

À un ~~point~~ nombre complexe $z = x+iy \in \mathbb{C}$ on associe le point dans $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x,y).



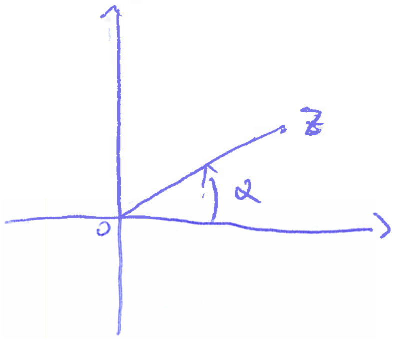
- $\operatorname{Re} z$ est la première coordonnée
- $\operatorname{Im} z$ " " deuxième "
- $|z|$ est la longueur du segment $[OP]$.
- $-z$ est le symétrique de z par rapport à O.
- $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.
- $z+w$ correspond à la somme des vecteurs associés à z et w.

Multiplier par $\lambda \in \mathbb{R}$ correspond à considérer le vecteur de direction associé à z dont la longueur est multipliée par λ.

[redacted] Comment interpréter la multiplication de deux nombres complexes ?

FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Déf: Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ← moins des ensembles un nombre complexe non nul. L'argument de z est la mesure de l'angle α en O entre l'axe positif des abscisses et le vecteur associé à z.



Rmq: α est défini que à multiple entier de 2π près.

Si $r = |z|$, on peut écrire

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Cette forme est dite trigonométrique.

Déf: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et $h \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On dit que a est équivalent à b modulo h, et on écrit $a \equiv b \pmod h$ si $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = kh$.

(On peut étendre cette définition à $a, b \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}^*$). ($a \equiv b \pmod 0 \Leftrightarrow a = b$)

Prop: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $h, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $a \equiv b \pmod h \Leftrightarrow \lambda a \equiv \lambda b \pmod{\lambda h}$.

Preuve: $a \equiv b \pmod h \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $a - b = kh \rightarrow \lambda a - \lambda b = k\lambda h \Rightarrow \lambda a \equiv \lambda b \pmod{\lambda h}$.

L'implication réciproque est analogue. □

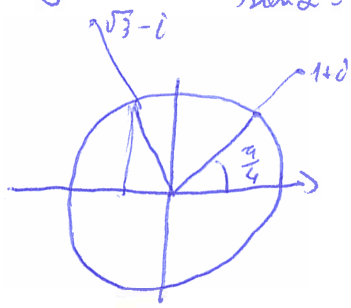
Forme cartésienne $\longleftrightarrow$ Forme trigonométrique

$$z = x + iy \qquad\qquad z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z = r\cos\alpha \\ y = \operatorname{Im} z = r\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \alpha = \arg(z), \text{ ou } \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \ \sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Exemple • $z = 1 + i$. $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$



• $z = -1 + i\sqrt{3}$ $\quad |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

$$\cos\alpha = \frac{-1}{2} \qquad \sin\alpha = +\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \alpha \equiv \frac{2}{3}\pi \pmod{2\pi}.$$

Propriétés de l'argument

Pour tout $z, w \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- * $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w)$
- $\arg(\lambda) \equiv \begin{cases} 0 & \lambda > 0 \\ \pi & \lambda < 0 \end{cases} \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^p) \equiv p \arg(z) \quad \forall p \in \mathbb{Z}$.

Pour montrer *, on a besoin des formules d'addition trigonométrique :

Prop : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. on a

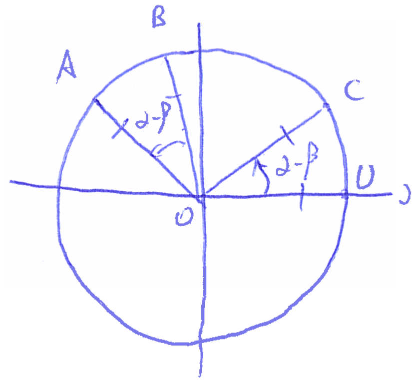
(C+) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

(C−) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

(S+) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

(S−) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$.

Preuve : (C−) :



Soient $A = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ $B = (\cos\beta, \sin\beta)$

$C = (\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$, $U = (1, 0)$

Les triangles $\overset{\Delta}{AOB}$ et $\overset{\Delta}{COU}$ sont congruents.

Donc $|\overline{AB}| = |\overline{UC}|$.

$$|\overline{AB}|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \underbrace{\sin^2\alpha}_{} + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

(avec $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$)

$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

$$|\overline{UC}|^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta))^2 = (\cos(\alpha-\beta))^2 - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + (\sin(\alpha-\beta))^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta).$$

Pour (C+), appliquer (C−) à α et $-\beta$.

Pour (S+), appliquer à $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$!

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) \overset{(C-)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Pour (S−), appliquer (S+) à α et $-\beta$. □

Corollaire : $\arg(zw) = \arg z + \arg w$.

Preuve : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$.

$$zw = rs(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = rs\Big(\underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha+\beta)}$$

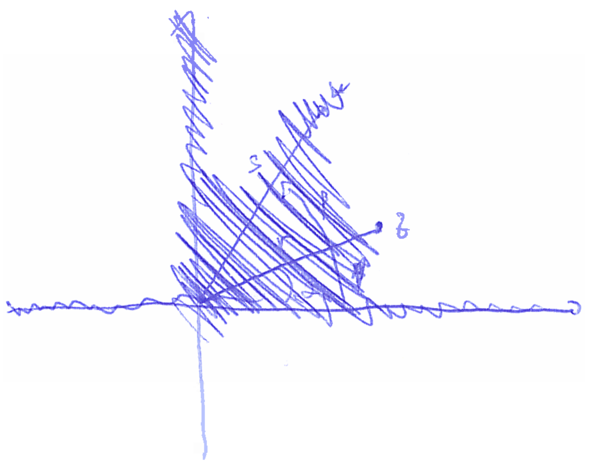
$$+ i\big(\underbrace{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}_{=\sin(\alpha+\beta)}\big)\Big) = rs\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right).$$ □

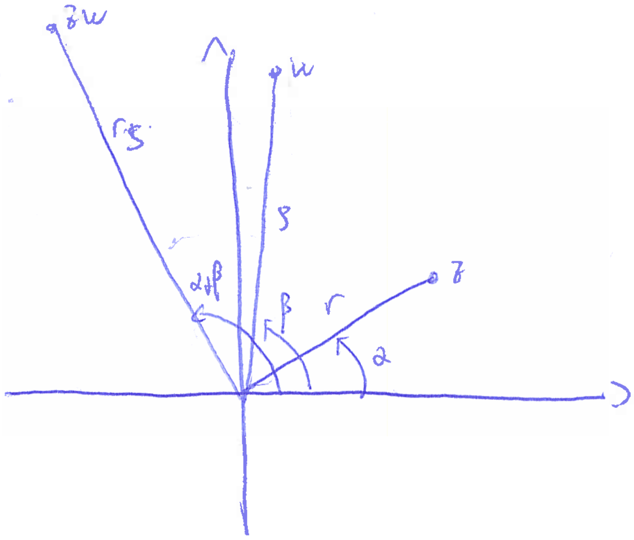
Forme Exponentielle.

Déf : La formule d'Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (\forall\alpha\in\mathbb{R})$ permet d'écrire un nombre complexe sous forme exponentielle

$$z = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Si $z = re^{i\alpha}$ et $w = se^{i\beta}$, on a $zw = rs\,e^{i(\alpha+\beta)}$.





C1-8

Rmq : Pour l'instant, $e^{i\alpha}$ est une notation.
On verra que cette notation est cohérente avec la notation de l'exponentielle complexe.

Rmq : Comme la ~~notation~~ forme trigonométrique, la forme exponentielle n'est pas uniquement déterminée :

$$re^{i\alpha} = se^{i\beta} \iff r=s=0 \text{ ou } \left(r=s\neq 0 \text{ et } \alpha \equiv \beta \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\right).$$

Propriétés de la forme exponentielle :

Soit $z = re^{i\alpha}$.

- $\bar{z} = re^{-i\alpha}$
- $-z = re^{i(\alpha+\pi)}$
- $|z| = r$
- $\arg(z) = \alpha$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$
- $z^p = r^p e^{ip\alpha}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$.